1 Théorème de Banach

Leçon: 153, 181, 253, 151

Réf: Rouvière, Brézis

⚠ plan analytique selon la leçon

Le but est de démontrer la version analytique et la version géométrique du 1 Théorème de Banach, dans le cadre de la dimension finie.
La version géométrique découle de la version analytique.

On fixe E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant

1) $\forall \lambda > 0 \ \forall x \in E, \ p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2) $\forall x, y \in E, \ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Lemme 1
Soient $u \in E$, F un sev de E, et $f \in F^*$ tq $f \leq p$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x, y \in F \quad f(x) - p(x-u) \leq a \leq p(y+u) - f(y).$$

Preuve
Soit $u \in E$ fixé. Alors pour $x, y \in F$, on a

$$\begin{aligned} &(f(x) - p(x-u)) - (p(y+u) - f(y)) \\ &= f(x+y) - p(x-u) - p(y+u) \\ &\leq f(x+y) - p(x+y) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

↙ f linéaire

↙ $p(x+y) = p(x-u+u+y) \leq p(x-u) + p(u+y)$

↙ $f \leq p$

Donc on choisit a tq

$$\sup_{x \in F} (f(x) - p(x-u)) \leq a \leq \inf_{y \in F} (p(y+u) - f(y))$$

□

Théorème 2 (HB analytique)

Soit F ssev de E, et soit $f \in F^*$ tq $f \leq p$. Alors il existe une forme linéaire $g \in E^*$ tq $\cdot\ g|_F = f$
$\cdot\ g \leq p$

Preuve

• Si $f = 0$, c'est immédiat, on prend $g = 0$. On suppose donc que $f \neq 0$.

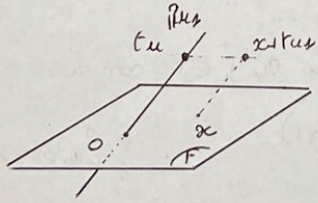
• Si $F = E$, c'est aussi immédiat : $g = f$.

On suppose que $F \subsetneq E$. Soit $u_1 \in E \setminus F$. On va étendre f à $F \oplus \mathbb{R}u_1$ via une forme linéaire $g_1 \in (F \oplus \mathbb{R}u_1)^*$ tq $g_1 \leq p$.

Comme E est de dimension finie, on ne peut répéter ce procédé qu'un nombre fini de fois. On obtiendra au final

$g : F \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}u_k = E \to \mathbb{R}$ tq $g|_F = f$ et $g \leq p$.

On pose $g_1 : F \oplus \mathbb{R}u_1 \to \mathbb{R}$
$x + tu_1 \mapsto f(x) + ta$, où a est donné par le lemme 2.



Heuristiquement :
→ f construite pour p
→ $f(\frac{x}{t}) + a$ aussi pour p
$\rightsquigarrow g_1$ convient aussi

• $g_1 \in (F \oplus \mathbb{R}u_1)^*$ (c'est clair)

• g_1 prolonge bien f

• $g_1 \leq p$? Il faut travailler un peu

Soit $x \in F$ et $t \in \mathbb{R}$

- Si $t = 0$, alors $g_1(x + tu_1) = g_1(x) = g(x) \leq p(x)$
- Si $t \neq 0$. $g_1(x + tu_1) = g(x) + ta$

⚠ Si $t > 0$: $g_1(x + tu_1) = t\left(g\left(\frac{x}{t}\right) + a\right)$ (Perm 1 avec $u = u_1$, $y = \frac{x}{t}$)

$\leq t\, p\left(\frac{x}{t} + u_1\right)$ car $t > 0$

$= p(x + tu_1)$

⚠ Si $t < 0$, $g_1(x + tu_1) = -t\left(g\left(-\frac{x}{t}\right) - a\right)$

$\leq -t\, p\left(-\frac{x}{t} - u_1\right)$ car $-t > 0$

$= p(x + tu_1)$

Donc $g_1 \leq p$.

□

Corollaire 3

F sev de E, et $g \in F^*$. Alors il existe $\tilde{g} \in E^*$ prolongeant g tq $\|g\|_{F^*} = \|\tilde{g}\|_{E^*}$

Preuve

On pose $p : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|g\|_{F^*} \|x\|$. Alors $\begin{cases} \forall \lambda > 0 \ \forall x \in E, \ p(\lambda x) = \lambda p(x) \\ \forall x, y \in E \ \ p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{cases}$

et $\forall x \in E \ \ g(x) \leq p(x)$.

Donc il existe par HB, $\tilde{g} \in E^*$ prolongeant g tq $\tilde{g} \leq p$.

□

Corollaire 4

$$\forall x \in E,\ \|x\|_E = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Preuve

On sait que $\forall f \in E^*$, non nulle, et $\|f\|_{E^*} \leq 1$ alors

$$\|x\|_E \geq |\langle f, x \rangle|. \quad \forall x \in E.$$

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. On pose $g : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$

$$tx \mapsto t\|x\|_E$$

$g \in (\mathbb{R}x)^*$, donc g se prolonge par $f \in E^*$ en une forme linéaire sur E. De plus, $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{(\mathbb{R}x)^*} = \|x\|_E \neq 0$ (Hyp)

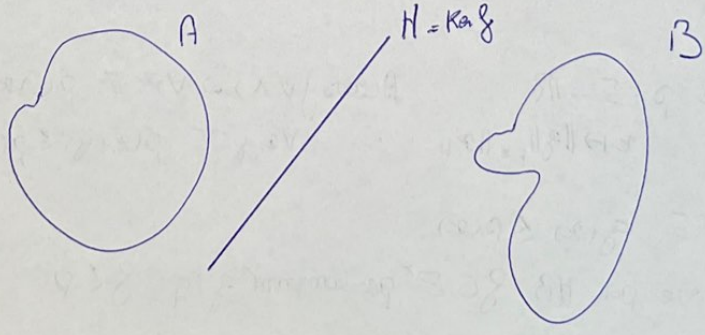
Alors : $\dfrac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_{E^*}} = \dfrac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|_E} = 1.$

Donc, $\forall \|f\|_{E^*} \leq 1$, $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\|_E$.

□

Théorème 5 (HB, version géométrique)

Soient $A \subset E$, $B \subset E$ deux convexes non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B (au sens large).



Preuve

On va utiliser la jauge d'un convexe (~ p dans HB analytique), et notre hyperplan sera donné par HB analytique.

On commence par deux lemmes.

Lemme 6 (Jauge d'un convexe)

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0. On pose

$$p : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\{\alpha > 0, \ \frac{1}{\alpha} x \in C\}$$

. est la jauge de C.

$p(x)$ grand : x loin de C
$p(x)$ petit : x proche de C

Alors : 1) $\exists \Gamma \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \ 0 \leq p(x) \leq \Gamma \|x\|$ (valable en dim finie)

2) $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$

3) p vérifie les hypothèses énoncées au début.

Preuve (lemme 6)

1) C est ouvert et $0 \in C$. Soit donc $r > 0$ tq $B(0,r) \subset C$.

Alors $\forall x \in E \quad \frac{r}{\|x\|} x \in C$, car $\frac{r}{\|x\|} \|x\| = r$

donc $\frac{r}{\|x\|} x \in B(0,r) \subset C$

Donc $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$. En prenant $\Gamma = \frac{1}{r}$, on a bien

$0 \leq p(x) \leq \Gamma \|x\|$.

2) . Si $p(x) < 1$. Alors il existe $0 < \alpha < 1$ tq $\frac{1}{\alpha} x \in C$.

Donc $x = \alpha \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} x\right)}_{\in C} + (1-\alpha) \underbrace{0}_{\in C} \in C$, car C convexe.

. Si $x \in C$, alors comme C est ouvert il existe $\varepsilon > 0$ (petit) tq $(1+\varepsilon) x \in C$. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

3). $\forall \lambda > 0, \ p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (évident).

. Soit $x, y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon} p(x) < 1$, donc $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$.

De même, $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$.

Donc $\forall t \in [0,1]$ $\underbrace{\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon}}_{= \varphi(t).} \in C$.

comme $p(\varphi(t)) < 1$. On cherche un t adéquat.

$$\varphi(t) = \frac{tx\,p(y) + tx\varepsilon + (1-t)y\,p(x) + (1-t)y\varepsilon}{\quad}$$

...

On choisit $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$. Alors $1-t = \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$

$$\varphi(t) = \frac{x}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} + \frac{y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

Donc $p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1 \Rightarrow p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$
$\forall \varepsilon$

□

Lemme 7 (séparation d'un convexe et d'un point)

Soit $C \subset E$ convexe ouvert non vide, et soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E^*$ tq $\forall x \in C$ $f(x) < f(x_0)$.
C'est-à-dire $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve (Lemme 7)

Quitte à translater on peut supposer que $0 \in C$. Soit p la jauge de C. Soit $g : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$, $tx_0 \mapsto t$. Tq $g \leq p$ $\forall x \in \mathbb{R}x_0$

Soit $tx_0 \in \mathbb{R}x_0$.

. Si $t<0$, alors $g(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0)$.

. Si $t \geq 0$, alors $g(tx_0) = t$

et $p(tx_0) = \inf\left\{\alpha > 0,\ \frac{t}{\alpha} x_0 \in C\right\}$

$= t\, p(x_0)$ et $p(x_0) \geq 1$ car $x_0 \notin C$.

$\geq t$

donc $g(tx_0) \leq p(tx_0)$.

HB analytique : il existe $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g et $f \leq p$ sur E.

En particulier $\to f(x_0) = g(x_0) = 1$

$\to \forall x \in C \quad f(x) \leq p(x) < 1$.

Donc $\forall x \in C \quad f(x) < 1$.

□

On reprend la preuve du thm 5.

On pose $C = A - B$, alors : - C convexe

- ouvert, $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ (ouvert)

- $0 \notin C$ (car $A \cap B = \emptyset$).

Par la forme 7, $(x_0 = 0)$, il existe $f \in E^*$ tq $\forall z \in C \ f(z) < 0$.

Donc $\forall x \in A, \forall y \in B \quad f(x) < f(y)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$.

Alors $[f = \alpha]$ sépare A et B.

□

Rmq : → ne pas savoir faire adapter selon la leçon (côté analyse ou côté géométrie)
→ faire des dessins

App : • l'enveloppe convexe de $O(n)$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Fred de E, $F \neq E$, il existe $f \in E'$, $f \neq 0$, $\forall x \in F \ \langle f, x \rangle = 0$ (plutôt en dim infinie).

Clex si $A \cap A'$ est pas convexe.

$E = \mathbb{R}^2$, $B = \{0\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\} \cup \{(1,0)\}$.

